■ Epreuve de mathématiques (mathématiques spéciales)

Durée : 4 heures

PROBLEME 1

On désigne par $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. On note $M_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des matrices carrées à n lignes et n colonnes ($n \in \mathbb{N}^*$).
Si A est un élément de $M_n(\mathbb{R})$, on note a_{ij} l'élément de A situé à l'intersection de la ligne i et de la colonne j ; on notera $A = (a_{ij})$. On pose : $N(A) = n \sup_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} |a_{ij}|$.

PARTIE 1

1°) Montrer que l'application $A \longrightarrow N(A)$ de $M_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^+$ est une norme sur l'espace vectoriel $M_n(\mathbb{R})$.

2°) Montrer que : $\forall (A, B) \in M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$; $N(AB) \le N(A)N(B)$.

3°) Soit X_p une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont les éléments sont des fonctions de l'entier p. On notera : $X_p = (x_{ij}(p))$.

a) Montrer que s'il existe une matrice L de $M_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\lim_{p \to +\infty} N(X_p - L) = 0.$$

alors la matrice L est unique. On convient de dire que la matrice L est la limite de la matrice X_p lorsque p tend vers $+\infty$ et on écrit : $L = \lim_{p \to +\infty} X_p$.

b) Montrer que la matrice $L = (l_{ij})$ définie plus haut existe si et seulement si les n^2 fonctions réelles $x_{ij}(p)$ ont une limite quand p tend vers $+\infty$ et que l'on a : $\lim_{p \to +\infty} x_{ij}(p) = l_{ij}$.

4°) Soit A une matrice quelconque de $M_n(\mathbb{R})$. On pose : $B_p = \sum_{h=0}^{h=p} \frac{1}{h!} A^h$.

Montrer que la matrice B_p admet une limite lorsque p tend vers $+\infty$. On posera par convention $B = \exp(A)$.
Conseil : On pourra poser $A = (a_{ij})$, $A^2 = ({}^2a_{ij})$, $A^3 = ({}^3a_{ij})$, $\cdots$ et montrer par récurrence sur l'entier k que : $|{}^k a_{ij}| \le n^{k-1} a^k$ avec $a = \sup_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}} |a_{ij}|$.

PARTIE 2

On se place désormais dans l'ensemble T des matrices de $M_2(\mathbb{R})$ du type : $A = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

1°) a) pour h appartenant à $\mathbb{N}$, calculer A^h puis $B_p = \sum_{h=0}^{h=p} \frac{1}{h!} A^h$.

b) En déduire $B = \exp(A)$.

2°) L'application f de T dans T définie par $f(A) = \exp(A)$ est-elle bijective ?

PROBLEME 2

PARTIE 1

Soit l'intégrale double

$$I(\lambda) = \iint_{\Delta} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

où Δ représente le domaine plan défini par

$$\Delta = \{ (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \ / \ 0 \leq y \leq x \leq \lambda \}$$

où λ est une constante réelle.

1°) Montrer que : $I(\lambda) = \frac{1}{2}[J(\lambda)]^2$ avec $J(\lambda) = \int_0^{\lambda} e^{-x^2} dx$.

2°) A l'aide du changement de variable défini par $\begin{cases} x = u \\ y = t\,u \end{cases}$, montrer que

$$I(\lambda) = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} K(\lambda) \quad \text{avec} \quad K(\lambda) = \int_0^1 \frac{e^{-\lambda^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt .$$

3°)

a) Déterminer $\lim_{\lambda \to +\infty} K(\lambda)$.

b) En déduire que : $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

PARTIE 2

Soit F l'espace vectoriel des fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continues et telles que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 e^{-t^2} dt$ converge. On munit F du produit scalaire :

$$\langle f | g \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, g(t)\, e^{-t^2} dt .$$

Dans toute la suite du problème, on identifiera un polynôme réel avec sa fonction polynôme associée.

On remarquera que les polynômes à coefficients réels (que l'on appellera plus brièvement polynômes réels) appartiennent à F.

On note P_n un polynôme réel de degré n dont le coefficient de plus haut degré est strictement positif.

1°) Déterminer les polynômes P_0 et P_1 tels que $\|P_0\| = \|P_1\| = 1$ et $\langle P_0 | P_1 \rangle = 1$.

2°) Soit une suite orthonormée finie de polynômes réels $P_0, P_1, P_2, \cdots P_n$ dont le coefficient du terme de plus haut degré est strictement positif.
On considère le polynôme Q_{n+1} de degré $(n+1)$ défini par :

$$Q_{n+1}(t) = t^{n+1} + \sum_{k=0}^{k=n} a_k P_k(t)$$

avec $a_0, a_1, \cdots, a_n$ coefficients réels.
Montrer que si Q_{n+1} est orthogonal aux polynômes P_k $(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$ alors :

$$a_k = -\langle t^{n+1} | P_k \rangle .$$

3°) Montrer que tout polynôme de degré $(n+1)$ orthogonal aux polynômes P_k $(k = 0, 1, 2, \cdots, n)$ est de la forme αQ_{n+1} avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

Déduire des résultats précédents qu'il existe, dans F, une suite orthonormée et une seule $\{P_n\}_{n \in N}$ où P_n est un polynôme réel de degré n dont le coefficient de plus haut degré est strictement positif.
Dans toute la suite du problème, c'est cette suite $\{P_n\}_{n \in N}$ qui est envisagée.

PARTIE 3

1°) Soit Π_{n+1} un polynôme réel, non identiquement nul, de degré $n+1$. Montrer que l'on peut écrire :

$$\Pi_{n+1} = \sum_{k=0}^{k=n+1} \alpha_k P_k \text{ avec } \alpha_k = \langle P_k | \Pi_{n+1} \rangle .$$

En déduire qu'il existe trois constantes réelles, notées $\delta_n, \beta_n, \gamma_n$ telles que :

$$\forall t \in R ;\ t P_n(t) = \delta_n P_{n+1}(t) + \beta_n P_n(t) + \gamma_n P_{n-1}(t). \qquad (1)$$

2°) On dit qu'un polynôme P_n est de parité n si lorsque n est un entier pair P_n est une fonction paire et si lorsque n est un entier impair P_n est une fonction impaire.

a) Montrer que si, pour $k \leq n$, P_k est de parité k, alors $\beta_n = 0$.

b) Montrer alors, par récurrence sur n, que pour tout n dans $\mathbb{N}$, P_n est de parité n.

c) Démontrer que $\gamma_n = \delta_{n-1}$.

La relation (1) s'écrit alors :

$$\forall\, t \in R;\ t\,P_n(t) = \delta_n\, P_{n+1}(t) + \delta_{n-1}\, P_{n-1}(t). \qquad (2)$$

3°)

a) Calculer $\langle t\,P_n \mid t\,P_n \rangle$ en fonction de δ_n et δ_{n-1}.

b) Montrer que : $2\langle t\,P_n' \mid P_n \rangle = -1 + 2(\delta_n^2 + \delta_{n-1}^2)$, où P_n' représente la dérivée de P_n.

c) Montrer par ailleurs que $\langle t\,P_n' \mid P_n \rangle + 1 = \delta_n \langle P_{n+1}' \mid P_n \rangle$ et en déduire que : $\delta_n \langle P_{n+1}' \mid P_n \rangle = \frac{1}{2} + \delta_n^2 + \delta_{n-1}^2$.

4°) Montrer que : $2\,\delta_n = \langle P_{n+1}' \mid P_n \rangle$ et en déduire δ_n en fonction de n et δ_0.

5°) On appelle polynôme d'Hermite de degré n, le polynôme, noté H_n et défini par :

$$H_n(t) = 2^{\frac{n}{2}} \sqrt[4]{\pi}\sqrt{n!}\, P_n(t).$$

Déterminer la relation de récurrence satisfaite par les polynômes d'Hermite.

PARTIE 4

1°) Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on a :

$$\langle H_n' \mid H_{n-1} \rangle = 2^n\, n!\sqrt{\pi}.$$

2°)

a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que :

$$\langle P_{n-1}' \mid P_{n+1}' \rangle = 0 \text{ puis que } \langle tP_n' \mid P_{n+1}' \rangle = 2n\sqrt{\frac{n+1}{2}}.$$

b) En déduire que $\| P_{n+1}' \|^2 = 2(n+1)$ puis que $\| H_n' \| = \sqrt{2n}\, \| H_n \|$

(pour démontrer la première égalité, on pourra utiliser l'égalité (2) après l'avoir dérivée).

3°) Montrer que $\langle H_n' \mid H_{n-1} \rangle = \| H_n' \| \cdot \| H_{n-1} \|$ et en déduire que pour tout n dans $\mathbb{N}^*$

$$H_n'(t) = 2n\, H_{n-1}(t).$$

4°) Déduire des résultats précédents que les polynômes d'Hermite vérifient l'équation différentielle :

$$H_n''(t) - 2t\, H_n' + 2n\, H_n(t) = 0.$$